Betrachte zunächst Ideale von abzählbaren Teilmengen.

Definition 1. Sei $\mathcal{I}$ ein echtes Ideal abzählbarer Teilmengen von S. $\mathcal{I}$ heißt $< \kappa$*-erzeugt* wenn es eine Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ gibt so, dass $|\mathcal{F}| < \kappa$ und

1. $[F]^{\leq\omega} \subset \mathcal{I}$ für jedes $F \in \mathcal{F}$ und
2. $\forall A \in \mathcal{I}\, \exists F \in \mathcal{F}\; A \subseteq^* F$

Definition 2. Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $T \subseteq X$. T heißt *orthogonal* zu $\mathcal{F}$, wenn $|T \cap F| < \omega$ für alle $F \in \mathcal{F}$

Bemerkung 1. Wenn $\mathcal{I}$ von $\mathcal{F}$ erzeugt wird, dann ist T orthogonal zu $\mathcal{F}$ gdw T orthogonal zu $\mathcal{I}$.

SID(κ) (*Small Ideal Dichotomy*) Wenn $\mathcal{I}$ ein $< \kappa$-erzeugtes Ideal von abzählbaren Teilmengen von S ist, dann gilt entweder:

(1) Es gibt ein überabzählbares $T \subset S$ orthogonal zu der erzeugenden Familie, oder

(2) Es gibt eine Zerlegung $S = \bigcup_{n\in\omega} S_n$ so, dass $[S_n]^{\leq\omega} \subset \mathcal{I}$ für alle $n \in \omega$.

SID := **SID**(ω_2)

Theorem 1. ***SID***$(\mathfrak{mm})$. Korollar: $\mathfrak{mm} > \omega_1 \Rightarrow$ ***SID***

Proof. Sei $\mathcal{I}$ ein Ideal wie gefordert und $\mathcal{F}$ die erzeugende Familie. Angenommen (2) gilt nicht, dann gilt insbesondere $\omega < |\mathcal{F}| < \mathfrak{mm}$, also $\mathfrak{mm} > \omega_1$. Wir definieren eine stationäre-Mengen-erhaltende partielle Ordnung $\mathcal{P}$ als die Menge aller $p = (T_p, \mathcal{X}_p, \mathcal{N}_p)$ mit den Eigenschaften:

1. $T_p \in [S]^{<\omega}$
2. $\mathcal{X}_p \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$
3. $\mathcal{N}_p$ ist eine endliche $\in$-Kette von abzählbaren elementare Untermodellen eines hinreichend großen Modells $(H_\theta, \in)$, welches $\mathcal{I}$ enthält.
4. Für alle $x, y \in T_p, x \neq y$ gibt es ein Modell $N \in \mathcal{N}_p$ so, dass $|\{x, y\} \cap N| = 1$.
5. Für jedes Modell $N \in \mathcal{N}_p$ und für alle $x \in T_p \setminus N$ und $Z \in \mathcal{P}(S) \cap N$ gilt: $x \in Z \Rightarrow [Z]^\omega \not\subseteq \mathcal{I}$

Mit der Ordnung $p \leq q$ gdw $T_q \subseteq T_p, \mathcal{X}_q \subseteq \mathcal{X}_p, \mathcal{N}_q \subseteq \mathcal{N}_p$ und für jedes $X \in \mathcal{X}_q$ gilt $(T_p \setminus T_q) \cap X = \emptyset$.

Das orthogonale $T \subset S$ zu $\mathcal{F}$ wird dann $\bigcup_{p\in\mathcal{G}} T_p$ für einen generischen Filter $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}$ sein.

Wir zeigen, dass $\mathcal{P}$ stationäre Mengen erhält:

Wir suchen $T \subset S$ überabzählbar und orthogonal zu $\mathcal{F}$. Definiere also für jedes $X \in \mathcal{F}$ und $\alpha < \omega_1$:

$$\mathcal{D}_X := \{p \in \mathcal{P} \mid X \in \mathcal{X}_p\} \qquad \mathcal{D}_\alpha := \{p \in \mathcal{P} \mid \exists N \in \mathcal{N}_p\; (\alpha \in N \wedge T_p \setminus N \neq \emptyset)\}$$

Für jedes $p \in \mathcal{P}$ und $X \in \mathcal{F}$ gilt $q = (T_p, \mathcal{X}_p \cup \{X\}, \mathcal{N}_p) \in \mathcal{D}_X$ und $q \leq p$, also ist $\mathcal{D}_X$ dicht in $\mathcal{P}$. Außerdem sind auch die $\mathcal{D}_\alpha$ dicht:

Proof. Seien $\alpha < \omega_1$ und $p \in \mathcal{P}$ beliebig und N ein abzählbares elementares Untermodell von H_θ, das α und p enthält. Setze $I = \bigcup \mathcal{X}_p$. Nachdem $\mathcal{I}$ ein echtes Ideal ist gilt $S \setminus I \neq \emptyset$. Außerdem können wir $S \setminus I$ nicht durch abzählbar viele S_n mit $[S_n]^\omega \subseteq \mathcal{I}$ überdecken , also gibt es ein $x \in (S \setminus I) \setminus N$ so, dass für jedes $Z \in N \cap \mathcal{P}(S)$ mit $[Z]^\omega \subseteq \mathcal{I}$ gilt $x \notin Z$ (Bedingung (5)). Also gilt $p \geq (T_p \cup \{x\}, \mathcal{X}_p, \mathcal{N}_p \cup \{N\}) \in \mathcal{D}_\alpha$. □

Nachdem $\mathfrak{mm} > \omega_1$ gilt finden wir also einen generischen Filter $\mathcal{G}$, der alle D_α und D_X schneidet. Definiere $T = \bigcup_{p\in\mathcal{G}} T_p$. Dann ist T überabzählbar und orthogonal zu $\mathcal{F}$:

Proof. Angenommen, $T = \{s_m \mid m \in \omega\}$, dann finden wir eine abzählbare Folge (N_m) so, dass $T \subseteq \bigcup_{m\in\omega} N_m$ mit $s_m \in T_m \subseteq N_m \in \mathcal{N}_m$ für $p_m = (T_m, \mathcal{X}_m, \mathcal{N}_m) \in \mathcal{G}$. Dann gibt es aber ein $\alpha \in \omega_1$ mit $\alpha \notin \bigcup_{m\in\omega} N_m$. Nachdem aber $\mathcal{G} \cap \mathcal{D}_\alpha \neq \emptyset$ gibt es $p \in \mathcal{G}$ und $N_p \in \mathcal{N}_p$ so, dass $\alpha \in N_p$ und $T_p \setminus N_p \neq \emptyset$, was ein Widerspruch ist, da dann $p, p_m \in \mathcal{G}$ keine gemeinsame Erweiterung haben (Widerspruch zu $\alpha \notin \bigcup T_p$), also ist T überabzählbar.

Sei nun $X \in \mathcal{F}$ und $p \in \mathcal{G}$ so, dass $X \in \mathcal{X}_p$. Wir zeigen, dass $T \cap X \subseteq T_p$ und somit endlich ist: Sei $s \in T \cap X$, dann gibt es $q \in \mathcal{G}$ so, dass $s \in T_q$. Sei $r \in \mathcal{G}$ mit $r \leq p, q$, dann gilt $s \in T_r$ und wegen $r \leq p$ und $X \in \mathcal{X}_p$ gilt $(T_r \setminus T_p) \cap X = \emptyset$ (Definition der Ordnungsrelation) und somit $s \in T_p$. □

□

Definition 3.
- Ein *set mapping* ist eine Abbildung $F : S \to \mathcal{P}(S)$.
- $T \subseteq S$ heißt F-frei, wenn für jedes $x \in T$ gilt $F(x) \cap T \subset \{x\}$.
- Ein set mapping heißt *sparse*, wenn es ein echtes σ-Ideal auf S gibt so, dass für jedes $Z \in \mathcal{I}^+$ ein $Z_0 \in [Z]^{\leq\omega}$ und $H \in \mathcal{I}$ existiert so, dass für alle endlichen $a \subseteq S \setminus H$ gilt $Z_0 \not\subseteq \bigcup_{x\in a} F(x)$.

SMP (*sparse (set-)mapping principle*) Zu jedem sparse set-mapping gibt es eine überabzählbare F-freie Menge.

Theorem 2. $\mathfrak{mm} > \omega_1 \Rightarrow$ ***SMP***

Proof. Sei $F : S \to \mathcal{P}(S)$ ein sparse set mapping und $\mathcal{I}$ das zugehörige σ-Ideal. Wir definieren die partielle Ordnung $\mathcal{P}$ als Menge aller Paare $(T_p, \mathcal{N}_p)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $T_p \in [S]^{<\omega}$ F-Frei?
2. $\mathcal{N}_p$ ist eine endliche $\in$-Kette abzählbarer elementarer Untermodelle eines hinreichend großen H_θ.
3. Für alle $x, y \in T_p, x \neq y$ gibt es ein Modell $N \in \mathcal{N}_p$ so, dass $|\{x, y\} \cap N| = 1$.
4. Für jedes Modell $N \in \mathcal{N}_p$ und jedes $x \in T_p \setminus N$ gilt: $\forall X \in \mathcal{I} \cap N \; x \notin X$.

Wir ordnen $\mathcal{P}$ mit: $p \leq q$ gdw $T_q \subseteq T_p, \mathcal{N}_q \subset \mathcal{N}_p$ und $\forall x \in T_q \; F(x) \cap (T_p \setminus T_q) = \emptyset$.
Dann erhält $\mathcal{P}$ stationäre Mengen:

Proof. (wie oben) □

Definiere für $\alpha \in \omega_1$:

$$\mathcal{D}_\alpha = \{p \in \mathcal{P} \mid \exists N \in \mathcal{N}_p \; \alpha \in N \wedge T_p \setminus N \neq \emptyset\}$$

Natürlich können wir für jedes $p \in \mathcal{P}$ ein geeignetes Modell N finden so, dass $(T_p, \mathcal{N}_p) \leq (T_p, \mathcal{N}_p \cup \{N\}) = q$ und $q \in \mathcal{D}_\alpha$, die D_α sind also dicht. Nach Vorraussetzung ist $\mathfrak{mm} > \omega_1$, also finden wir einen generischen Filter $\mathcal{G}$. Definiere $T = \bigcup_{p \in \mathcal{G}} T_p$, dann ist T überabzählbar (genau wie vorher) und F-frei:

Proof. Sei $x \in T$, dann gibt es also ein $p \in \mathcal{G}$ mit $x \in T_p$ und T_p ist F-frei, d.H. $F(x) \cap T_q \subset \{x\}$ für alle $q \leq p$ und damit für alle $p \in \mathcal{G}$, also $F(x) \cap T \subset \{x\}$.

□

□

Definition 4. Ein Ideal $\mathcal{I}$ über einer Menge S heißt *P-Ideal*, wenn es für jede Familie $\{A_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}$ ein $A \in \mathcal{I}$ gibt so, dass $A_n \subseteq^* A$ für jedes $n \in \omega$.

Das „duale“ zu **SID**:

PID (*P-Ideal Dichotomy*) Wenn $\mathcal{I}$ ein P-Ideal von abzählbaren Teilmengen von S ist, dann gilt entweder:

(1) Es gibt ein überabzählbares $T \subset S$ so, dass $[T]^{\leq\omega} \subseteq \mathcal{I}$, oder

(2) Es gibt eine Zerlegung $S = \bigcup_{n \in \omega} S_n$ so, dass S_n orthogonal zu $\mathcal{I}$ ist für alle $n \in \omega$.

Theorem 3. $\mathfrak{mm} > \omega_1 \Rightarrow$ ***PID***

Proof. Sei also $\mathcal{I}$ ein P-Ideal abzählbarer Teilmengen von S und gelte Bedingung (2) aus PIDnicht. Wir definieren eine SSP-Ordnung, die die Existenz einer Menge T erzwingt, welche Bedingung 1 von PIDerfüllt; also überabzählbar ist und $[T]^{\leq\omega} \subseteq \mathcal{I}$ erfüllt.
Sei θ eine für alle Zwecke hinreichend große Kardinalzahl so, dass $[S]^\omega \in H_\theta$. Wähle für jede abzählbare elementare Unterstruktur $N \prec H_\theta$ jeweils $x_N \in S$ und $b_N \subseteq S \cap N$ so, dass:

1. $b_N \in \mathcal{I}$ und $\forall a \in \mathcal{I} \cap N \; (a \subseteq^* b_N)$. Nachdem N abzählbar ist und $\mathcal{I}$ ein P-Ideal ist, finden wir so ein b_N.
2. Für jedes $X \in \mathfrak{P}(S) \cap N$ mit $X \perp \mathcal{I}$ gelte $x_N \notin X$. Nachdem Bedingung (2) nicht gilt, ist S keine abzählbare Vereinigung zu $\mathcal{I}$ orthogonaler Mengen; so ein x_N findet sich also auch immer.

Man beachte, dass wenn $<_\theta$ eine Wohlordnung von H_θ ist, wir die Abbildungen $N \mapsto b_N$ und $N \mapsto x_N$ in $(H_\theta, \in, <_\theta)$ definierbar annehmen können, indem wir die x_N und b_N jeweils minimal bzgl. $<_\theta$ wählen. Entsprechend wählen wir nun als Forcingordnung $\mathcal{P}$ die Menge aller endlichen $\in$-Ketten abzählbarer elementarer Unterstrukturen von $(H_\theta, \in, <_\theta)$ mit der folgenden Ordnung:

$$p \leq q :\Leftrightarrow p \supseteq q \wedge \forall M \in q \; \forall N \in M \cap (p \setminus q) \; (x_N \in b_M)$$

Wir müssen zeigen, **dass diese Ordnung proper ist:**

Proof. Sei also $\mathcal{P} \in M \prec H_\kappa$ für ein hinreichend großes κ und $\overline{p} \in \mathcal{P} \cap M$ beliebig. Setze $p = \overline{p} \cup \{M \cap H_\theta\}$. Um zu zeigen, dass p brereits M-generisch ist, wählen wir $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}$ und $r \leq p$ mit $r \in \mathcal{Y} \in M$ beliebig. Wir müssen ein zu r kompatibles $\overline{r} \in \mathcal{Y} \cap M$ finden.
Sei also $\mathcal{X}$ die Menge aller $s \in \mathcal{Y}$, die Enderweiterungen von $r \cap M$ sind und die selbe Länge wie r besitzen. Für $s \in \mathcal{X}$ sei dann $x^s = (x_1^s, ..., x_k^s)$ die Folge der Elemente $\{x_N \mid N \in s \setminus (r \cap M)\}$ geordnet nach der $\in$-Ordnung der Modelle in s. Betrachte die Menge $\mathcal{F} = \left\{x \in S^k \mid \exists s \in \mathcal{X} \; (x^s = x)\right\}$. Dann gilt natürlich $x^r \in \mathcal{F}$ und die Menge ist in M definierbar. Wir werden nun induktiv eine Sequenz aus $\mathcal{F}$ konstruieren, die uns eine zu r kompatible Erweiterung $\overline{r}$ wie gesucht liefert.
Betrachte dazu zunächst das Coideal $\mathcal{H} = \{X \subseteq S \mid \mathcal{I} \not\perp X\}$. Dann ist $\mathcal{F}$ groß relativ zu $\mathcal{H}$:

Proof. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{H}x_1 ... \mathcal{H}x_k \; ((x_1, ..., x_k) \in \mathcal{F})$ gilt. Definiere dazu für jedes $i \leq k$:

$$\mathcal{F}_i = \left\{(x_1, ..., x_i) \in S^i \mid (x_1, ..., x_i, x_{i+1}^r, ..., x_k^r) \in \mathcal{F}\right\}$$

und

$$\mathcal{F}^i = \{(x_1, ..., x_i) \in \mathcal{F}_i \mid \mathcal{H}y_1 ... \mathcal{H}y_{k-i} \; (x_1, ..., x_i, y_1, ..., y_{k-i}) \in \mathcal{F}\}$$

Wir zeigen per Rückwärtsinduktion, dass für alle $i \leq k$ gilt $(x_1^r, ..., x_i^r) \in \mathcal{F}^i \neq \emptyset$ und damit insbesondere $\mathcal{F}^0 = \{\emptyset\} \neq \emptyset$, woraus die Behauptung folgt:
Per Definition gilt natürlich $x^r \in \mathcal{F}_k = \mathcal{F}^k$. Gelte also die Behauptung für ein $i + 1 \leq k$ und betrachte die Menge $X = \left\{x \in S \mid (x_1^r, ..., x_i^r, x) \in \mathcal{F}^{i+1}\right\}$. Nach Induktionsvorraussetzung gilt $x_{i+1}^r =: x_{N_{i+1}} \in X$ und in dem entsprechenden Modell $N_{i+1} \in r$ ist X definierbar. Nach Definition der x_N darf also X nicht orthogonal zu $\mathcal{I}$ sein, also $X \in \mathcal{H}$ und somit $(x_1, ..., x_I) \in \mathcal{F}^i$. □

Wir nutzen nun die Familie der $\mathcal{F}^i$ aus dem vorherigen Beweis, um induktiv das gewünschte $s \in \mathcal{X}$ zu finden. Die $\mathcal{F}^i$ sind in M definierbar und nicht orthogonal, es gibt also ein $a_1 \in \mathcal{I} \cap M$ mit $a_1 \subset \mathcal{F}^1$. Nach Definition der b_N muss also $a_1 \subseteq^* b_{N_i}$ gelten für alle $N_i \in r \setminus M$. Setze $b = \bigcap_{i=1}^k b_{N_i}$ und wähle also ein $\xi_1 \in (a_1 \cap b) \subset \mathcal{F}^1$.

Setze nun induktiv $X_{i+1} = \left\{\xi \in S \mid (\xi_1, ..., x_i, \xi) \in \mathcal{F}^{i+1}\right\}$. Dann gilt wieder $X_i \in M \cap \mathcal{H}$ und entsprechend gibt es wieder ein $a_i \in \mathcal{I} \cap M$ mit $a_i \subset X_i$ und $a_i \subseteq^* b$, wir können also ein $\xi_i \in a_i \cap b$ wählen.

Wir erhalten somit eine Folge $(\xi_1, ..., \xi_k) \in \mathcal{F} \cap M$ mit $\{\xi_1, ..., \xi_k\} \subset b$ und somit eine korrespondierende Erweiterung $\overline{r} \in \mathcal{X} \cap M$ von $r \cap M$ mit $x^{\overline{r}} = (\xi_1, ..., \xi_k)$. Nachdem die Sequenz komplett in jedem b_{N_i} erhalten ist, ist $r \cup \overline{r}$ eine gemeinsame Fortsetzung von r und $\overline{r}$, die Elemente sind also kompatibel. □

Definiere nun für jedes $\alpha < \omega_1$ die Menge $\{p \in \mathcal{P} \mid \exists N \in p\ (\alpha \in M)\} = D_\alpha$. Diese Mengen sind dicht: Sei dazu $p \in \mathcal{P}$ beliebig und $\alpha \notin M$ für jedes $M \in p$. Erweitere p zu $p' = p \cup \{N\}$ für ein neues $N \prec H_\theta$ mit $\alpha \in N$ und $M \prec N$ für alle $M \in p$. Dann ist $M \cap (p' \setminus p) = M \cap \{N\} = \emptyset$ für alle $M \in p$ und damit $p' \leq p$.

Entsprechend finden wir einen generischen Filter $\mathcal{G}$, der alle D_α schneidet und in $\mathcal{G}$ finden wir eine $\in$-Kette $(M_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}$. Setze $x_\alpha = x_{M_\alpha}$ und betrachte $T := \{x_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$. **Dann ist $T \subseteq S$ überabzählbar und $[T]^{\leq\omega} \subseteq \mathcal{I}$:**

Proof. Angenommen, $x_\alpha = x_\gamma$ für $\alpha < \gamma$. Dann gilt (wegen Definierbarkeit) $x_\gamma = x_\alpha \in M_\gamma$ und somit auch $\{x_\gamma\} \in M_\gamma$. Dann ist $\{x_\gamma\} \in \mathfrak{P}(S) \cap M_\gamma$ und trivialerweise $\{x_\gamma\} \perp \mathcal{I}$, also $x_\gamma \notin \{x_\gamma\}$, Widerspruch. Die x_α sind also paarweise verschieden und somit T überabzählbar.

Sei $\omega < \beta < \omega_1$ beliebig und $M_\beta \in p_\beta \in \mathcal{G}$. Nachdem jedes p nur endlich viele Modelle enthält finden wir für fast alle $\alpha < \beta$ zugehörige $p_\alpha \in \mathcal{G}$ so, dass $M_\alpha \in p_\alpha \setminus p_\beta$. Dann gilt für $p' \leq p_\alpha, p_\beta$ also $M_\alpha \in M_\beta \cap (p' \setminus p_\beta)$ und somit $x_\alpha \in b_\beta$, also $\{x_\alpha \mid \alpha < \beta\} \subseteq^* b_\beta$.

Sei nun $X \in [T]^\omega$, dann gibt es also ein $\beta < \omega_1$ mit $X \subseteq \{x_\alpha \mid \alpha < \beta\} \subseteq^* b_\gamma \in \mathcal{I}$ für irgendein b_γ, wir müssen uns also nur noch um den endlichen Rest kümmern. Also angenommen $X \notin \mathcal{I}$, dann gibt es also endlich viele $x_{i_1} ... x_{i_n}$ mit $x_{i_j} \notin I$ für alle $I \in \mathcal{I}$. Betrachte die Menge $A = \{x \in S \mid \{x\} \notin \mathcal{I}\}$, dann gilt $A \perp \mathcal{I}$ und, wie wir annehmen, $x_{i_j} \in A$. Diese Menge ist in H_θ definierbar, also gilt für alle $\alpha < \gamma$ auch $A \in N_\alpha$ und damit $x_\alpha \notin A$. Es folgt $X \in \mathcal{I}$. □

Es folgt, dass mit T Bedingung (1) aus PIDfür $\mathcal{I}$ erfüllt ist. □